

Problème 115 – Une combinaison au handball – Corrigé

1) a) On a $\overrightarrow{A_1A_3}(0 - (-7); 12 - 10)$ donc $\overrightarrow{A_1A_3}(7; 2)$.

D'où : $A_1A_3 = \|\overrightarrow{A_1A_3}\| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$

La distance exacte entre les joueurs positionnés en A_1 et A_3 est $\sqrt{53}$ m.

b) A_2 est au milieu de $[A_1A_3]$.

Donc $A_2(\frac{x_{A_1}+x_{A_3}}{2}; \frac{y_{A_1}+y_{A_3}}{2})$

$A_2(\frac{0+(-7)}{2}; \frac{12+10}{2})$, soit $A_2(-3,5; 11)$,

c) (C) a donc pour équation : $(x - x_{A_2})^2 + (y - y_{A_2})^2 = (\frac{A_1A_3}{2})^2$

Soit $(x + 3,5)^2 + (y - 11)^2 = (\frac{\sqrt{53}}{2})^2$

Soit $(x + 3,5)^2 + (y - 11)^2 = \frac{53}{4}$

d) On s'assure que les coordonnées A_4 vérifient l'équation de (C).

$(x_{A_4} - x_{A_2})^2 + (y_{A_4} - y_{A_2})^2 = (-2 + 3,5)^2 + (11 - \sqrt{11} - 11)^2$

$= (-1,5)^2 + (\sqrt{11})^2 = 2,25 + 11 = 13,25 = \frac{53}{4}$.

Les coordonnées de A_4 vérifient l'équation de (C) donc A_4 est bien sur (C).

2) a) On a $\overrightarrow{A_1S} = \frac{2}{5} \overrightarrow{A_1A_4}$ donc $A_1S = \frac{2}{5} \times A_1A_4$

$A_1S = \frac{2}{5} \times 5,51 \approx 2,20$

$A_1S \approx 2,20$ m

Comme S est un point de $[A_1A_4]$, on en déduit $A_4S = A_1A_4 - A_1S$

D'où $A_4S = 5,51 - 2,20 \approx 3,31$

$A_4S \approx 3,31$ m

b) Le triangle SA_4A_3 est rectangle en A_4 : en effet, A_4 étant un point de (C) de diamètre $[A_1A_3]$, par propriété $A_1A_4A_3$ est rectangle en A_4 . S étant un point de $[A_1A_4]$, on en déduit que l'angle $\widehat{SA_4A_3}$ est droit et donc que le triangle SA_4A_3 est rectangle en A_4 .

D'après le théorème de Pythagore :

$$A_3S^2 = A_3A_4^2 + A_4S^2$$

$$A_3S^2 = 4,76^2 + 3,31^2$$

$$A_3S^2 = 4,76^2 + 3,31^2$$

$$A_3S = \sqrt{4,76^2 + 3,31^2} \approx 5,80$$

$A_3S \approx 5,80$ m.

c) On applique le théorème de la médiane dans le triangle A_1SA_3 .

En effet, A_2 étant le milieu de $[A_1A_3]$, (SA_2) est une médiane de ce triangle.

$$\text{On a alors : } SA_1^2 + SA_3^2 = 2 SA_2^2 + \frac{A_1A_3^2}{2}$$

$$\text{Donc } 2 SA_2^2 = SA_1^2 + SA_3^2 - \frac{A_1A_3^2}{2}$$

$$SA_2^2 = \frac{1}{2} (SA_1^2 + SA_3^2 - \frac{A_1A_3^2}{2})$$

$$\text{Et enfin } SA_2 = \sqrt{\frac{1}{2} (SA_1^2 + SA_3^2 - \frac{A_1A_3^2}{2})}$$

$$\text{Donc } SA_2 = \sqrt{\frac{1}{2} (2,20^2 + 5,80^2 - \frac{\sqrt{53}^2}{2})}$$

$$SA_2 \approx 2,45.$$

3) Il suffit de montrer que les deux points ont une abscisse égale à -5.

C'est évidemment déjà le cas pour S_1 .

Pour S , il faut calculer son abscisse :

$$\text{On a } \overrightarrow{A_1S} = \frac{2}{5} \overrightarrow{A_1A_4} \text{ donc } (x_S - x_{A_1}) = \frac{2}{5} (x_{A_4} - x_{A_1})$$

$$x_S = \frac{2}{5} (x_{A_4} - x_{A_1}) + x_{A_1}$$

$$\text{Soit } x_S = \frac{2}{5} (-2 - (-7)) + (-7) = \frac{2}{5} \times 5 + (-7) = -5.$$

Donc (SS_1) est bien la droite d'équation $x = -5$.

b) Les coordonnées de T vont vérifier l'équation de (C) .

$$(x_T + 3,5)^2 + (y_T - 11)^2 = \frac{53}{4}.$$

$$\text{Donc } (-5 + 3,5)^2 + (y_T - 11)^2 = \frac{53}{4}.$$

$$1,5^2 + (y_T - 11)^2 = \frac{53}{4}.$$

$$2,25 + (y_T - 11)^2 = 13,25$$

$$(y_T - 11)^2 - 11 = 0.$$

$$(y_T - 11 - \sqrt{11})(y_T - 11 + \sqrt{11}) = 0.$$

$$\text{Soit } y_T = 11 + \sqrt{11} \text{ ou } y_T = 11 - \sqrt{11}$$

On trouve donc $y_T = 11 - \sqrt{11}$ car $y_T < 9$.

On observe au passage que T et A_4 ont la même ordonnée.

$$4) \text{ a) } \overrightarrow{UV}(-1,5 - (-3); 0 - 5) \text{ et } \overrightarrow{UW}(1,5 - (-3); 0 - 5)$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{UV}(1,5; -5) \text{ et } \overrightarrow{UW}(4,5; -5)$$

$$\text{b) } \overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW} = 1,5 \times 4,5 + (-5) \times (-5) = 31,75 \text{ (ou } \frac{127}{4}).$$

$$\text{c) } \|\overrightarrow{UV}\| = \sqrt{1,5^2 + (-5)^2} \text{ et } \|\overrightarrow{UW}\| = \sqrt{4,5^2 + (-5)^2}$$

$$\|\overrightarrow{UV}\| = \sqrt{27,25} \text{ et } \|\overrightarrow{UW}\| = \sqrt{45,25}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW} = \|\overrightarrow{UV}\| \times \|\overrightarrow{UW}\| \times \cos \widehat{VUW}.$$

$$\text{Donc } \cos \widehat{VUW} = \frac{\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW}}{\|\overrightarrow{UV}\| \times \|\overrightarrow{UW}\|}.$$

$$\text{Et } \widehat{VUW} = \text{Arccos} \left(\frac{\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW}}{\|\overrightarrow{UV}\| \times \|\overrightarrow{UW}\|} \right).$$

$$\text{Soit : } \widehat{VUW} = \text{Arccos} \left(\frac{31,75}{\sqrt{27,25} \times \sqrt{45,25}} \right) = 25,29^\circ \text{ ou } 0,441 \text{ rad.}$$